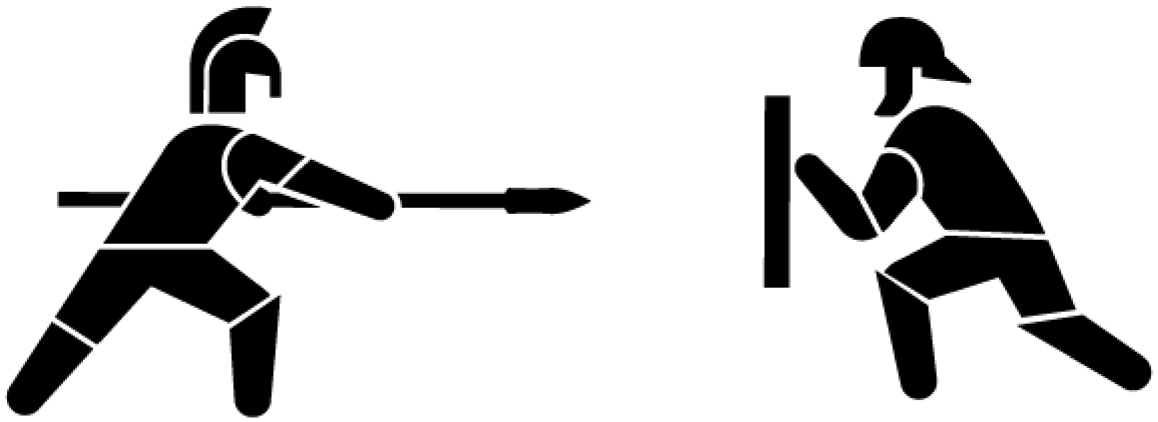
オペレーションズリサーチとゲーム理論

6/23(木), 6/30(木), 7/15(金)

兵庫県立大学

円谷　友英



オペレーションズリサーチ　(直訳)作戦研究

- 第二次世界大戦の軍事的作戦の研究
- (広義)意思決定の科学的方法
  - 問題を整理する
  - 観察→モデル化→定式化→解析→最適解→適用→考察
- 問題の型の分類
  - ゲーム理論，待ち行列，生産計画，スケジューリング，ネットワーク，・・・
- 手法の分類
  - 線形計画法，シミュレーション，確率，回帰分析・・・

- 計画性
  - 状況を把握したい
  - 最適な方策を探したい
    - 問題は複雑に
    - 関係者の立場はさまざま
    - 想定できる不測の事態にも
- 不確実性
  - シミュレーション
    - 変動が激しい世の中
    - 人の感覚もあいまい
    - 理論的には解決できない

進め方とお願い

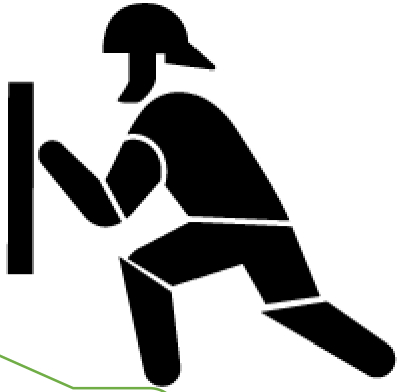
- とても簡単な例題を使って，少しの作業を伴います
- 場面を切り取って考えます
  - 世の中そんなに単純じゃない
  - 点の連続が線
  - 使えるものは使おう
- アイデアを広げてみてください
- 身近な問題に置き換えてみてください
  - どんな応用できそう
  - そいえば，同じようなカタチの問題を知っているかも
  - できること，できそうなこと，できないこと

今日のテーマ

- 【基本方針】 限りある資源を有効活用する
  - トレードオフ
  - コストパフォーマンス
  - 最適化

- 【取り扱う問題】 IT環境を安全に保つために対策を講じる
  - いろいろな想定をしてみます
  - 想定の範囲内で考えます
    - 確実なこと，不確実なこと
    - ひとりじゃない

どうやって守ろうか，対策しようか･･･



たくさん，何回も，対策できるなら安全だけど，そうもいかない

- 対策I と対策II を準備しました
- それぞれ何回するのが効果的でしょうか？
- 【問題の整理】
  - (目的)　できるだけたくさんのファイルを守りたい　→ファイル数を最大化
  - (条件)　コストはかけたくありません
  - (条件)　メモリには限界があります
  - (条件)　限られた時間しかありません

	対策I	対策II	可能量
コスト	1(千円)	1(千円)	5(千円)
メモリ	2(MB)	1(MB)	8(MB)
時間	1(時間)	2(時間)	8(時間)
ファイル	4(百個)	5(百個)	
回数	x1回	x2回	

問題の定式化

$$\max \quad 4x_1 + 5x_2$$

subject to

$$x_1 + \quad x_2 \le 5$$
$$2x_1 + \quad x_2 \le 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

- 守れるファイル数は最大に
- コストは5(千円)以下に
  - 対策1 : 1回に1(千円)
  - 対策2 : 1回に1(千円)
- メモリは8(MB)
  - 対策1 : 1回に2(MB)
  - 対策2 : 1回に1(MB)
- 時間は8(時間)以内
  - 対策1 : 1回に1(時間)
  - 対策2 : 1回に2(時間)

問題を解く（最適解を探す）

$$\max \ 4x_1 + 5x_2$$

できるだけ上

subject to

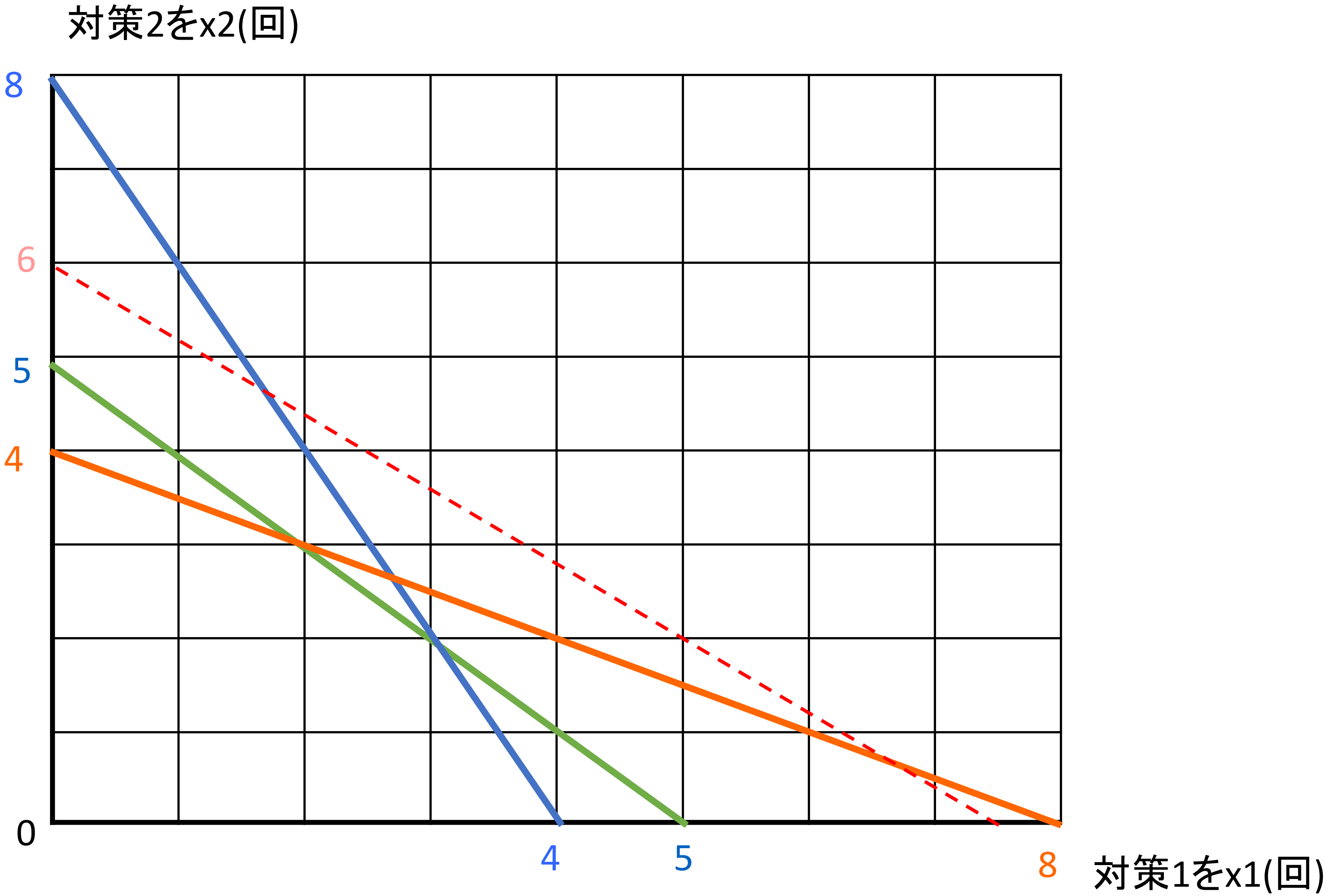
$$x_1 + \ \ x_2 \le 5$$

$$2x_1 + \ \ x_2 \le 8$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

3本線より下側



コスト，メモリ，時間の制約を踏まえて，守ることができるファイル数は，最大23(百個)

- コストとメモリが交わる点を通るとき

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \text{ (回)} \\ x_2 = 3 \text{ (回)} \end{cases}$$

- このとき，守れるファイル数は

$$4x_1 + 5x_2 = 4\times 2 + 5\times 3 = 23 \quad \text{(百個)}$$

- お金(コスト)の使用量：$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$ (千円) 使いきり →足りない
- メモリの使用量：$2x_1 + x_2 = 2\times 2 + 3 = 7$ (MB) 1MB余裕あり
- 時間の使用量：$x_1 + 2x_2 = 2 + 3\times 2 = 8$ (時間) 使いきり →足りない

ここまでのまとめ

- 守る人の立場から最適化
- たくさんのファイルを守りたい
- 手持ちの資源は有限

現状	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト(千円)	1	1	5	5
メモリ(MB)	2	1	8	7
時間(時間)	1	2	8	8
ファイル(百個)	4	5	23	
回数	2	3		

- 【問題の整理】 現状を表にまとめて，定式化した
- 【分析】 現状での最適解を求めた

$$
\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 5x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + \ \ x_2 \le 5 \\
&2x_1 + \ \ x_2 \le 8 \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&x_1, x_2 \ge 0 \\
&\Rightarrow (x_1, x_2) = (2,3) ---23
\end{aligned}
$$

ここからの作業

- 【考察】 次の一手を考える

【考察1】この先どうしよう？

現状	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト(千円)	1	1	5	5
メモリ(MB)	2	1	8	7
時間(時間)	1	2	8	8
ファイル(百個)	4	5	23	
回数	2	3		

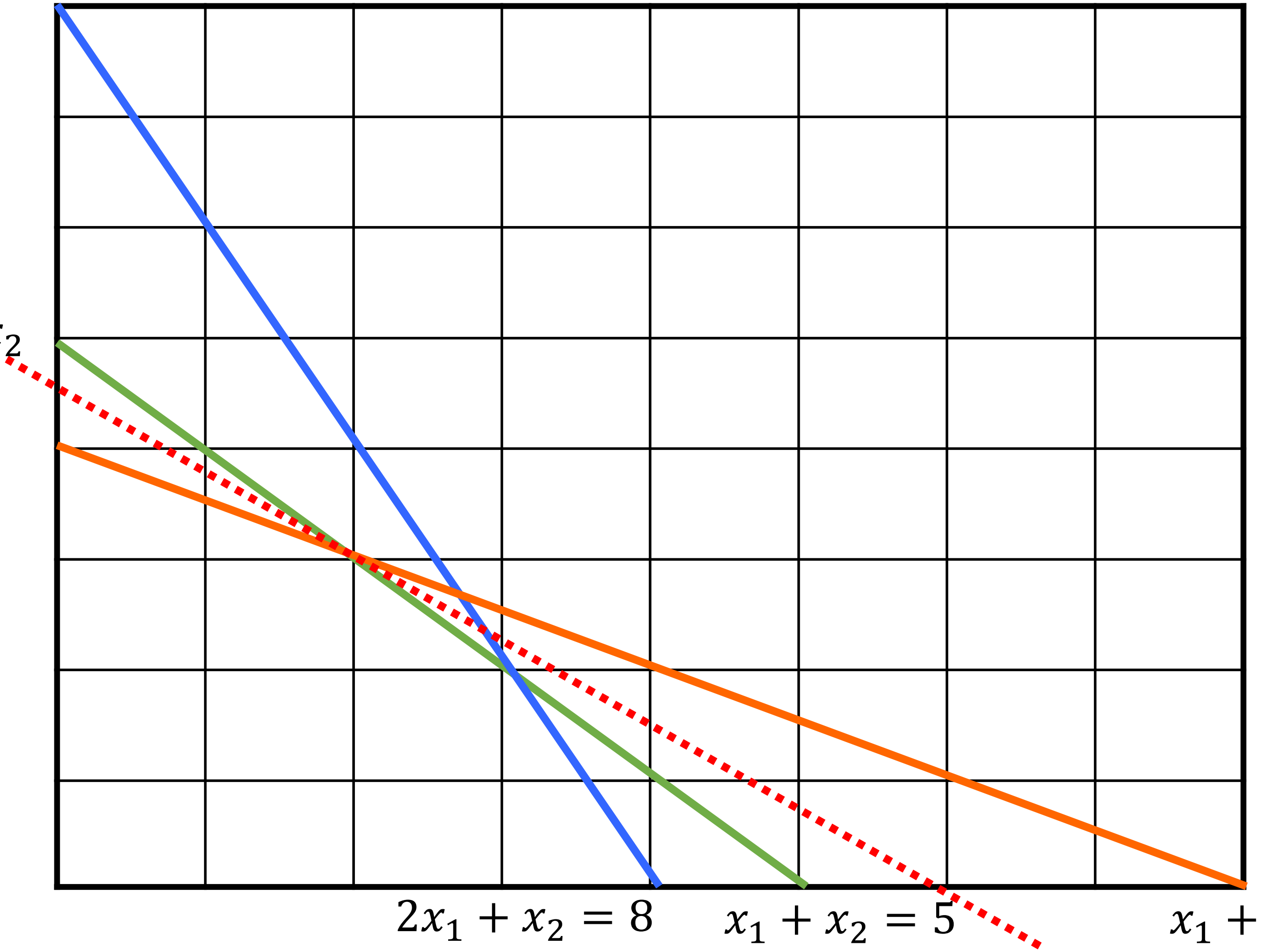
- 現状に満足していれば，それでよいが･･･
- 少し無理をしたら，もっと守れる？

【分析】

- メモリには，まだ余裕がある
- コスト(お金) と(または) 時間にあと少しあれば，もっとたくさんのファイルを守れることができる！
  - 頑張れば，多少は準備できそう
- どちらの方が，ファイル増に効果的か？
  - お金を0.1(千円)追加して，5.1(千円)にすると，守れるファイルはいくつ増える？
  - 時間を0.1(時間)追加して，8.1(時間)にすると？

$$\max\ 4x_1 + 5x_2$$
$$\text{subject to}\ x_1 + x_2 \le 5.1 \leftarrow 5$$
$$2x_1 + x_2 \le 8.1 \leftarrow 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

IT環境を安全に保つために



$$
\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 5x_2 \\
&\text{subject to}\ x_1 + x_2 \le 5.1 \\
&2x_1 + x_2 \le 8 \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&x_1 \ge 0 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}
\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.2 \\ x_2 = 2.9 \end{cases} (23.3)
$$

$$
\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 5x_2 \\
&\text{subject to}\ x_1 + x_2 \le 5 \\
&2x_1 + x_2 \le 8.1 \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&x_1 \ge 0 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}
\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.9 \\ x_2 = 3.1 \end{cases} (23.1)
$$

お金を0.1(千円)追加すれば，0.3ファイル増える→1ファイル増やすには，0.33(千円)必要
時間を0.1(時間)追加すれば，0.1ファイル増える→1ファイル増やすには，0.1(時間)必要

【考察2】 お金をどれくらい増やそうか・・・？

- 現状を変化させるには，痛みを伴う
  - 無駄な労力は払いたくない
- 無駄にお金をかけたくはない
  - お財布が許す限り増額すれば，その分，ファイル数も増えるわけではない
- お金の追加限界を知る
  - あといくら追加すればよいのか？

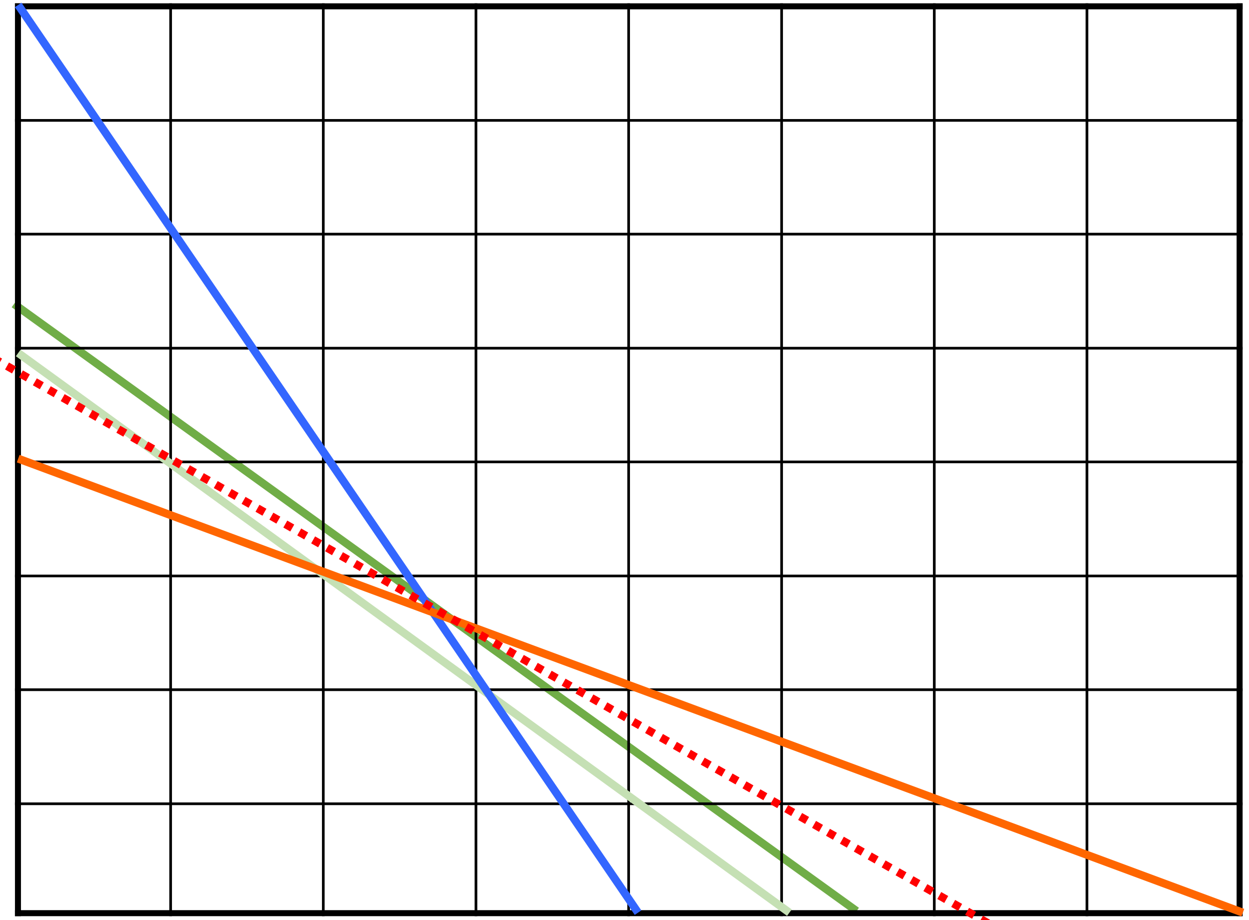
お金の追加限界を知る

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to}\ & x_1 + x_2 \le 5.1 \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.2 \\ x_2 = 2.9 \end{cases}$$

0.1増額	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト(千円)	1	1	5.1	5.1
メモリ(MB)	2	1	8	7.3
時間(時間)	1	2	8	8
ファイル(百個)	4	5	23.3	
回数	2.2(2)	2.9(3)		

- お金を0.1(千円)増やすと
- 守れるファイルは，0.3(百個)増える
- 対策1は，0.2(回)増える→+0.8(百個)
- 対策2を，0.1(回)減る→-0.5(百個)

- メモリが，0.3(MB)余計に必要になる
  - メモリの残りは，1(MB)あった
- 0.333(千円)以上増やししたら，メモリを使い切ってしまう
  - それ以上の増額に意味はない



$$
\begin{aligned}
&\max \ 4x_1 + 5x_2 \\
&\text{subject to} \ \ x_1 + \ \ x_2 \le 5.333 \leftarrow 5 \\
&\qquad\qquad\quad 2x_1 + \ \ x_2 \le 8 \\
&\qquad\qquad\quad \ \ x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&\qquad\qquad\quad \ \ x_1 \ge 0 \\
&\qquad\qquad\quad \ \ x_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.67 \\ x_2 = 2.67 \end{cases} (24)
$$

0.33増額	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト	1	1	5.33	5.33
メモリ	2	1	8	8
時間	1	2	8	8
ファイル	4	5	24	
回数	2.67	2.67		

『感度分析』 いずれかの条件・状態が変化したときの他への影響を知る

ここまでのまとめ

現状	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト	1	1	5	5
メモリ	2	1	8	7
時間	1	2	8	8
ファイル	4	5	23	
回数	2	3		

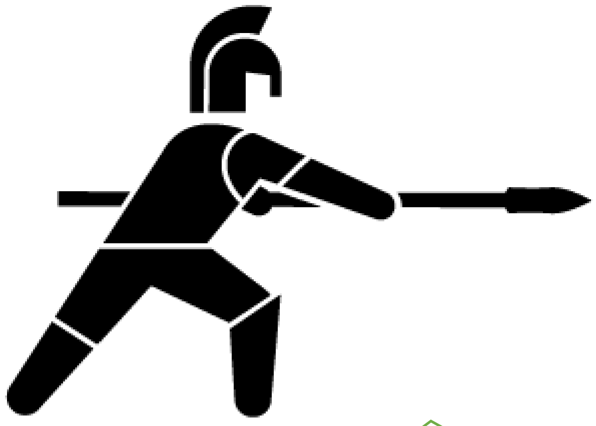
- 守る人の立場から最適化
- たくさんのファイルを守りたい
- 手持ちの資源は有限

- 【問題の整理】 現状を表にまとめて，定式化した
- 【分析】 現状での最適解を求めた
- 【考察】 次の最適な一手を求めた

0.33増額	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト	1	1	5.33	5.33
メモリ	2	1	8	8
時間	1	2	8	8
ファイル	4	5	24	
回数	2.67	2.67		

どうやって攻めようか(攻撃しようか)・・・

- 攻められるから守る
- 攻撃A と攻撃B と攻撃C ができます
- それぞれ何回するのが効果的でしょう？
  - できるだけばれたくはない ログ(最小化)
  - ネットワークαに4箇所以上ダメージを与えたい
  - ネットワークβに5箇所以上ダメージを与えたい



ばれれてもいいなら，
いくらでもできる

	攻撃A	攻撃B	攻撃C	最低目標
ネットワークα(箇所)	1	2	1	4
ネットワークβ(箇所)	1	1	2	5
ばれるリスク(ログ)	5	8	8	
回数(回)	y1	y2	y3	

問題の定式化

- ばれるリスクは最小に抑えたい
- ネットワークα,βに最低目標回数以上はダメージを与えたい

$$\min \ 5y_1 + 8y_2 + 8y_3$$

subject to

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

【結果】

- $y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = 1$
- ばれるリスクは，23

【考察】

- 各攻撃のばれるリスクを減らすべく工夫する

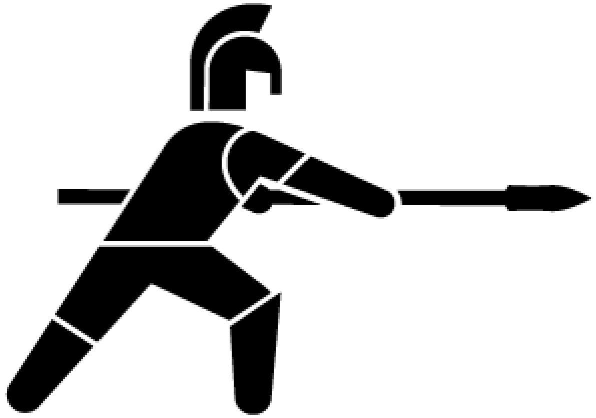
	攻撃A	攻撃B	攻撃C	目標	達成
ネットワークα	1	2	1	4	4
ネットワークβ	1	1	2	5	5
ばれるリスク	5	8	8		
回数	3	0	1		

〇自分にとっての条件で，自分にとっての最適化を図る
〇相手がいるのに，相手の出方は気にしない/できない/仮定する
・・・独りよがりではないか？

□最適目的関数値は，等しい
□表の中の数字が等しい(転置)
□『双対性』線形計画問題の特徴

	対策I	対策II	限界
コスト(千円)	1	1	<=5
メモリ(MB)	2	1	<=8
時間(時間)	1	2	<=8
ファイル(百個)	4	5	23
回数	2	3	
攻撃A	1	2	>=9
攻撃C	2	1	>=3

〇防ぎきれないかもしれない



	攻撃A	攻撃B	攻撃C	最低目標
ネットワークα (回)	1	2	1	>=4
ネットワークβ (回)	1	1	2	>=5
ばれるリスク(ログ)	5	8	8	23
回数	3	0	1	
最低攻撃回数	>=8	>=1	>=7	

●相手が嫌がることとする
●自分にとってのプラスは，相手にとってのマイナス!?

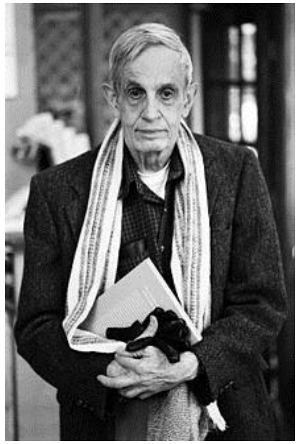
今日の線形計画　まとめ

- 【できたこと】 問題を整理する
  - 攻める人　と　守る人　を切り取って(別々に)考えた
  - 条件のちょっとした変更に備える　(目的のちょっとした変更)
- 【できたこと】 変数が2つなら，図を描いて解ける
  - 端点探索すればよい　(端っこにしか最適解はない)

- 【できなかったこと】 変数が3つ以上のとき
  - ソフトウェア，ピボット演算，行列演算，内点法，など
- 【できなかったこと】 守る人と攻める人を同時に考えていない
  - もしも，相手の出方がこうなら，自分はこうする
    - 他の人々がそれぞれの目的を達成するために，どのような意思決定をしているかを常に考えながら，自分自身の目的の達成を目指して意思決定を行うもの

ゲーム理論

- 1994年　ジョン・フォン・ノイマン，オスカー・モルゲンシュテルン
- ゲームとは
  - 何人かのプレーヤーがいる
  - 定められたルールがある
  - より大きな利益をあげる最適な手を打とうとする
  - 打つ手によって，各プレーヤーは利益や損失をこうむる
  - 結果に対する支払(payoff)は明確に定まっていて，プレーヤーは事前に知っている
- ナッシュ均衡　ジョン・フォーブス・ナッシュ(数学者)
  - 2015年没　映画「ビューティフル・マインド」



囚人のジレンマ

- ２人の囚人がいます
- 彼らは共犯者だと思われます
- 別々に取調べを受けて，刑期が決められます

- 互いに，素直に，罪を認めれば，罪に応じた罰として，懲役2年です
- どちらも黙秘すれば，罪のレベルがはっきりしないので，懲役は１年です
- 一方だけが罪を認めて，他方が黙秘したら，認めたことで減刑され(懲役0年)，隠したことで懲役が追加され懲役3年になります

囚人のジレンマ

個人の最適な選択が，
必ずプレイヤー全体にとって
良い結果を導くわけではない

懲役 X年→利得 –X (囚人1, 囚人2)		囚人2	
		黙秘・協力	自白・裏切り
囚人1	黙秘・協力	(-1, -1)	(-3, 0)
	自白・裏切り	(0, -3)	(-2, -2)

あなたが，囚人1なら

- ベストは，相手が黙秘してくれて，自分が自白するとき　→懲役0年(利得0)
- もしも，相手も自白するなら，自分も自白する　→懲役2年(利得-2)

･･･(結論)どちらにしても，自白する　→最悪2年

利得 (妻,夫)		夫	
		しない	する
妻	しない	(7,7)	(3,10)
	する	(10,3)	(5, 5)

あなたが，囚人2なら･･･(結論)自白する　→最悪2年(利得-2)

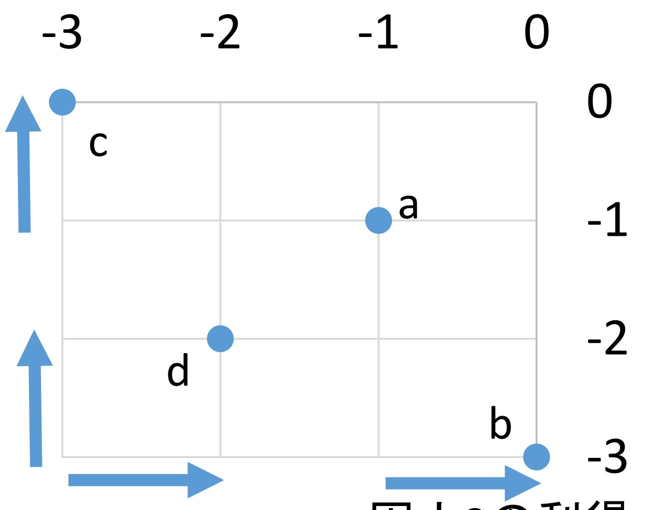
さいごに，あなたが，アドバイザなら･･･(結論)2人とも黙秘すべし！→　1年(利得-1)

囚人のジレンマ

『利得行列(Payoff Matrix)』

懲役 X年→利得 –X (囚人1, 囚人2)		囚人2	
		黙秘・協力	自白・裏切り
囚人1	黙秘・協力	a(-1, -1)	c(-3, 0)
	自白・裏切り	b(0, -3)	d(-2, -2)

- d(2,-2)はナッシュ均衡である
- d(2,-2)はパレート最適ではない
  - a(-1,-1)があるから
  - a(-1,-1), c(-3,0), b(0,-3)はパレート最適



- 『ナッシュ均衡』 d(2,-2)
  - どのプレーヤーも，自分の戦略を変更することによって，より高い利得を得ることができない戦略の組み合わせ
  - そのときの利得がゲームの解・値

当事者

- 『パレート最適』 a(-1,-1), c(-3,0), b(0,-3)
  - どのプレーヤーも，他プレーヤーの利得を減らさずに，自分の利得を増やすことができない戦略の組み合わせ
    - (非劣) 互いの利得が増える戦略は他にない

アドバイザ

チキンゲーム

- 2人の囚人がいます
- 彼らは共犯者だと思われます
- 別々に取調べを受けて，刑期が決められます

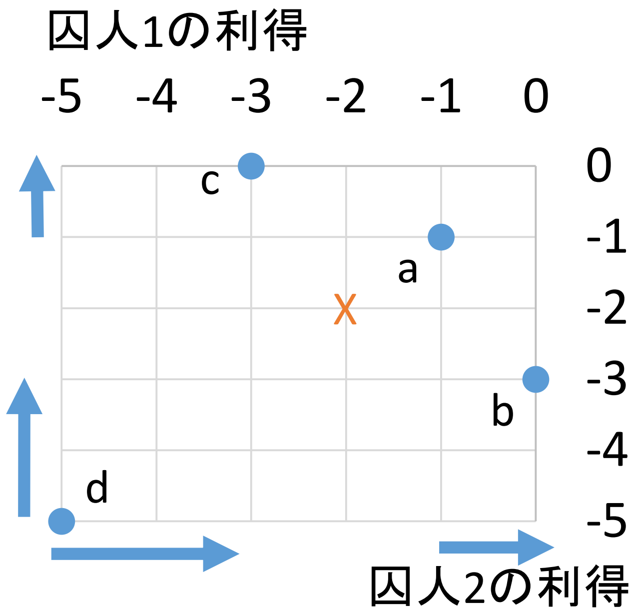
- 互いに，罪を認めれば，非常に重い罪なので，懲役5年です
- どちらも黙秘すれば，罪のレベルがはっきりしないので，懲役は1年です
- 一方だけが罪を認めて，他方が黙秘したら，認めた方は減刑され(懲役0年)，認めなかった方は懲役3年になります

チキンゲーム

懲役 X年→利得 –X (囚人1, 囚人2)		囚人2	
		黙秘・協力	自白・裏切り
囚人1	黙秘・協力	a(-1, -1)	c(-3, 0)
	自白・裏切り	b(0, -3)	d(-5, -5)

- あなたが，囚人1なら
  - ベストは，相手が黙秘してくれて，自分が自白するとき →懲役0年(利得0)
  - もしも，相手も自白するなら，自分は黙秘する →懲役3年(利得-3)
  - ・・・(結論)相手の出方による，どちらかが妥協するのがベスト

相手が自分のことまで考えて行動してくれるわけではない
相手は相手の最適化の原理のもと行動する



- 『ナッシュ均衡』・・・ b(0,-3), c(-3,0)
  - どのプレーヤーも，自分の戦略を変更することによって，より高い利得を得ることができない戦略の組み合わせ
- 『パレート最適』・・・ a(-1,-1), c(-3,0), b(0,-3)
  - どのプレーヤーも，他プレーヤーの利得を減らさずに，自分の利得を増やすことができない戦略の組み合わせ
    - (非劣) 互いの利得が増える戦略は他にない

ブレーキ	踏む	踏まない
踏む	(ばつが悪い,ばつが悪い)	(チキン, カッコいい)
踏まない	(カッコいい, チキン)	(悲劇, 悲劇)

今日のテーマ(思いだす)

- 防御チーム
  - 対策1, 2でどうやって守ろう
- 攻撃チーム
  - 攻撃A, B, Cでどうやって攻めよう
- チームごとに最適化
  - 資源を有効活用する
  - 相手の出方は予想する
    - 一場面を切り取る

	対策I	対策II	限界
コスト(千円)	1	1	<=5
メモリ(MB)	2	1	<=8
時間(時間)	1	2	<=8
ファイル(百個)	4	5	23
回数	2	3	
攻撃A	1	2	>=9
攻撃C	2	1	>=3

	攻撃A	攻撃B	攻撃C	最低目標
ネットワークα（箇所）	1	2	1	>=4
ネットワークβ（箇所）	1	1	2	>=5
ばれるリスク(ログ)	5	8	8	23
回数	3	0	1	
最低攻撃回数	>=8	>=1	>=7	

- 最適戦略は相手の出方による
  - 相手は，自分が嫌がるように仕掛けてくる

攻める人もいれば，守る人もいる環境の下
ゲーム理論で【問題整理】

- 守る人の立場･･･より多くの攻撃を防ぎたい･･･最大探し：12防御
  - 対策1で，攻撃Aを，1時間当たり，9回はじくことができる
- 攻める人の立場･･･はじかれる攻撃をより少なくしたい･･･最小探し：0防御
  - 攻撃Aをしても，対策1があれば，1時間当たり，9回ははじかれる
- 『ゼロ和(サム)ゲーム』
  - 利得の総和が常にゼロ(一定)
  - 守る人の利得(守れた数)は，攻める人の損失(失敗した攻撃数)

囚人のジレンマ，チキンゲームは，ゼロ和ではない

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人		
		攻撃A	攻撃B	攻撃C
守る人	対策1	9	1	2
	対策2	3	0	12

攻める人の利得 (=守る人の損失)		攻める人		
		攻撃A	攻撃B	攻撃C
守る人 表2-7	対策1	−9	−1	−2
	対策2	−3	0	−12

ナッシュ均衡・鞍点(復習)

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人		
		攻撃A	攻撃B	攻撃C
守る人	対策1	9	1	2
	対策2	3	0	12

相手の戦略が変わったら，もっといい戦略はあるけれど・・・

- どのプレーヤーも，自分の戦略を変更することによって，より高い利得を得ることができない戦略の組み合わせ
  - そのときの利得がゲームの解・値

対策1なら，最悪1防御しかできない
対策2なら，最悪0防御しかできない

- 守る人の立場では，結局，どちらの対策を選ぶ？
  - 相手がどれでくるかはわからない・・・
  - 最悪でも(最小の利益)1防御できるから，対策1

攻撃Aなら，最悪9防御もされる
攻撃Bなら，最悪1防御もされる
攻撃Bなら，最悪12防御もされる

- 攻める人の立場なら，最悪でも1防御で済むから，攻撃B

合理的選択の基準

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人		
		攻撃A	攻撃B	攻撃C
守る人	対策1	9	1	2
	対策2	3	0	12

対策1なら，最悪1防御　⇔-1も損をする＊
対策2なら，最悪0防御　⇔0も損をする

攻撃Aなら，9も損をする　⇔最悪-9の利益
攻撃Bなら，1も損をする　⇔最悪-1の利益　＊
攻撃Bなら，12も損をする　⇔最悪-12の利益

- 『マキシミン戦略』
  - 相手戦略による利益の最小が最大となる戦略を選ぶ
- 『ミニマックス原理･法』
  - 相手戦略による最大の損失が最小となる戦略を選ぶ
- 他にも･･･
  - ラプラス基準(平均)
    - (好)　対策2(5防御)　---　対策1(4防御)　(嫌)
  - マキシマックス基準(最大の利益が最大となるもの)～楽観主義
    - (好)　攻撃C(12防御)　---　攻撃A(9防御)　---　攻撃B(1防御)　(嫌)

人間もっと適当な気もする
こういう「基準」が合致する
のはどんなとき？

鞍点がある2人ゼロ和ゲームの一般化

Aさんの利得 (=Bさんの損失)		Bさん				
		戦略1	・・・	戦略j	・・・	戦略n
Aさん	戦略1	a_{11}		a_{1j}		a_{1n}
	・・・					
	戦略i	a_{i1}		a_{ij}		a_{in}
	・・・					
	戦略m	a_{m1}		a_{mj}		a_{mn}

Bさんの利得		Bさん				
		戦略1	・・・	戦略j	・・・	戦略n
Aさん	戦略1	$-a_{11}$		$-a_{1j}$		$-a_{1n}$
	・・・					
	戦略i	$-a_{i1}$		$-a_{ij}$		$-a_{in}$
	・・・					
	戦略m	$-a_{m1}$		$-a_{mj}$		$-a_{mn}$

- Aさんにとっての最適方策・戦略
  - 自分の戦略の最小利得の最大化
    - 相手の戦略による

$$\max_i\left(\min_j a_{ij}\right)$$

行の最小値：最小利益

列の最大値：最大の戦略

- Bさんにとっての最適方策・戦略

$$\max_j\left(\min_i (-a_{ij})\right)$$

行の最大値

列の最小値

$$= \max_j\left(-\max_i a_{ij}\right) = -\min_j\left(\max_i a_{ij}\right)$$

- 自分の最大損失の最小化

鞍点がある・・・ $\max_i\left(\min_j a_{ij}\right) = \min_j\left(\max_i a_{ij}\right)$

最適方策・戦略を求めてみる

- それぞれの立場で，最適戦略を求めてみる

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人		
		攻撃A	攻撃B	攻撃C
守る人	対策1	0	2	5
	対策2	6	4	2

- 相手戦略による利益の最小が最大となる戦略を選ぶ(マキシミン戦略)
- 相手戦略による最大の損失が最小となる戦略を選ぶ(ミニマックス原理)

ここまでの問題をまとめる

- 最適方策(ナッシュ均衡)があるなら，各自それを繰り返す
- 他の戦略にする動機がない
  - 自分だけの変更では利得を上げられない
  - 相手の出方がわかっていれば，もっとよい戦略はあったとしても
  - よく考えたら，最悪の場合を想定したら，もうそれしかない

- ナッシュ均衡がない場合がある
- 戦略をうまく組み合わせる『混合方策』
  - 対策1を●%と対策2を〇%を混ぜて繰り返す

定式化に向けて【守る人の立場から】

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人			比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C	
守る人	対策1	0	2	5	x
	対策2	6	4	2	1−x
比率		y1	y2	1−(y1+y2)	

- 対策の組み合わせる比率を求める
- 利益(守れる回数)を期待値で考える

→攻撃による最小の利益を最大にする比率(守)
(マキシミン戦略)

$$\max \quad s$$

subject to

$$6(1-x) \geq s$$

$$2x+4(1-x) \geq s$$

$$5x+2(1-x) \geq s$$

$$x, d \geq 0$$

- 攻撃Aがきたら，$6(1-x)$防御できる
- 攻撃Bがきたら，$2x+4(1-x)$防御できる
- 攻撃Cがきたら，$4x+2(1-x)$防御できる
- いずれがくるかは分からないけれど，その最小sを最大化する

定式化に向けて【攻める人の立場から】

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人			比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C	
守る人	対策1	0	2	5	x
	対策2	6	4	2	1−x
比率		y1	y2	1−(y1+y2)	

- 攻撃の組み合わせる比率を求める
- 損失を期待値で考える

→最大の損失を最小に抑える比率(攻)

(ミニマックス原理)

$$\min \ d$$

subject to

$$2y_2+5(1-y_1-y_2)\leq d$$

$$6y_1+4y_2+2(1-y_1-y_2)\leq d$$

$$y_1, y_2, d\geq 0$$

- 対策1があったら，$2y_2+5(1-y_1-y_2)$防御される
- 対策2があったら，$6y_1+4y_2+2(1-y_1-y_2)$防御される
- いずれがあるかはわからないけれど，大きいほうdを最小化する

守る人の戦略(対策の組み合わせ比率)
解いてみる･･･線形計画法復習

$$\max\ s$$

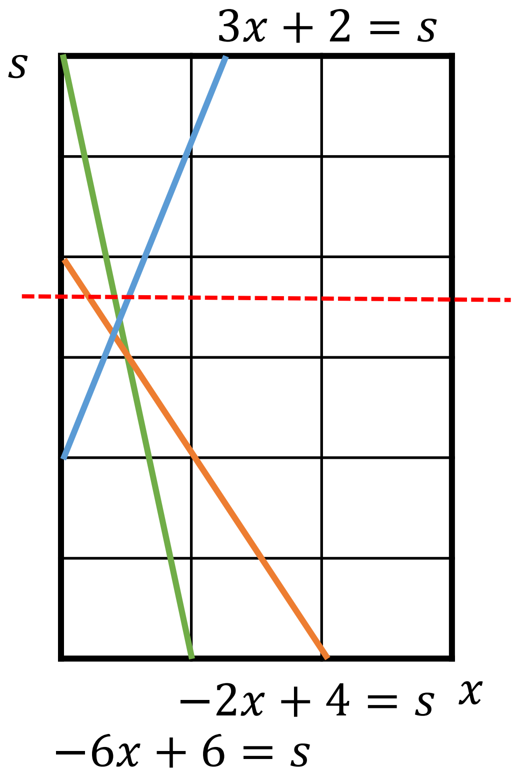
subject to

$$6(1-x) \geq s$$

$$2x+4(1-x) \geq s$$

$$5x+2(1-x) \geq s$$

$$x, s \geq 0$$



$$\begin{cases} 3x+2=d \\ -2x+4=d \end{cases} \leftrightarrow x=\frac{2}{5}, d=\frac{16}{5}$$

相手がどんな出方でこようが，
5回に2回は対策1で，残り3回は対策2でいく
という均衡

攻める人の損失 (=守る人の利得		攻める人目線			比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C	
守る人	対策1	0	2	5	2/5
	対策2	6	4	2	3/5
期待損失は？		18/5	16/5	16/5	
比率		0	y2	1−y2	

攻める人の攻撃の組み合わせ比率

解いてみる･･･線形計画法復習

攻撃Aはせずに,
5回に3回は攻撃Bで，残り2回は攻撃Cでいく
という均衡

min d

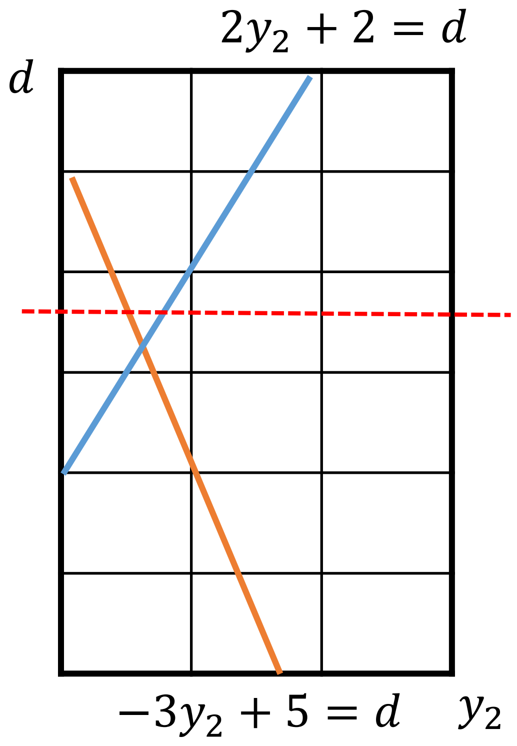
subject to

$$2y_2+5(1-y_1-y_2)\le d$$
$$6y_1+4y_2+2(1-y_1-y_2)\le d$$
$$y_1, y_2, s\ge 0$$

min d

subject to

$$2y_2+5(1-y_2)\le d$$
$$4y_2+2(1-y_2)\le d$$
$$y_2, s\ge 0$$



$$\begin{cases} 2y_2+2=s \\ -3y_2+5=\mathrm{d} \end{cases} \leftrightarrow y_2=\frac{3}{5}, s=\frac{16}{5}$$

攻める人の損失 (=守る人の利得)		攻める人			比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C	
守る人	対策1	0	2	5	2/5
	対策2	6	4	2	3/5
比率		0	3/5	2/5	

『混合方策･戦略』
戦略の組み合わせによる均衡
2人ゼロ和ゲームならば，必ず存在する

ここまでのまとめ

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人			最小利得	(min)	比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C			
守る人	対策1	0	2	5	−1	<=0	x1=2/5
	対策2	6	4	2	−1	<=0	x2=3/5
最大損失		−1	−1	−1	0	=−1	s=16/5
(max)		>=0	>=0	>=0	=−1		
比率		y1=0	y2=3/5	y3=2/5	d=16/5		−16/5

max s

subject to

$$6(1-x)\geq s$$
$$2x+4(1-x)\geq s$$
$$5x+2(1-x)\geq s$$
$$x,s\geq 0$$

min $-s$

subject to

$$6x_2-s\geq 0$$
$$2x_1+4x_2-s\geq 0$$
$$5x_1+2x_2-s\geq 0$$
$$-x_1-x_2=-1$$
$$x_1,x_2,s\geq 0$$

min d

subject to

$$2y_2+5(1-y_1-y_2)\leq d$$
$$6y_1+4y_2+2(1-y_1-y_2)\leq d$$
$$y_1,y_2,s\geq 0$$

max $-d$

subject to

$$2y_2+5y_3-d\leq 0$$
$$6y_1+4y_2+2y_3-d\leq 0$$
$$-y_1-y_2-y_3=-1$$
$$y_1,y_2,y_3,\mathrm{d}\geq 0$$

双対問題

- 行列の転置
  - 最大化⇔最小化
- 最適目的関数値が等しい
  - 混合方策のナッシュ均衡

今日のゲーム理論　まとめ

現状	対策I	対策II	可能量	使用量
コスト(千円)	1	1	<=5	5
メモリ(MB)	2	1	<=8	7
時間(時間)	1	2	<=8	8
ファイル(百個)	4	5	23(max)	
回数	2	3		
攻撃A	1	2	>=9	攻撃A

- 【できたこと】 問題を整理する
  - 定式化→最適解→考察
  - 攻める人　と　守る人　の関係を捉えた
- 【できたこと】 最適方策・戦略を求める
  - ナッシュ均衡(鞍点)がなければ，混合方策・戦略を考える

守る人の利得 (=攻める人の損失)		攻める人			比率
		攻撃A	攻撃B	攻撃C	
守る人	対策1	0	2	5	2/5
	対策2	6	4	2	3/5
守る人の利得(攻める人の損失)					16/5

- 【できなかったこと】 他のいろいろなパタン
  - 3人以上のとき
  - ゼロ和でないとき
  - 互いに協力するとき(利得を分配)
  - 展開していくとき
  - 先手と後手があるとき(シュタッケルベルグ)・・・
- 【できそうなこと】 資源の有効活用と相手の出方を同時に考える
  - 2(多)目的，2段階

今日のまとめ

- IT環境を安全に保つために対策を講じる
- 守る人の立場から最適化
  - 手持ちの資源を活用して，最大の成果を挙げる対策1,2を実施する
  - 現状を踏まえて，効果的な次の手を考える
- 攻める人の立場から最適化
  - 目標を達成できて，リスクを最小に押さえた攻撃A,B,Cを実施する
- 守る人と攻める人のゲームとして最適化
  - 相手の戦略による最大の損失が最小となる戦略 (ミニマックス)
  - 相手の戦略による最小の利益が最大となる戦略 (マキシミン)
  - 自力ではこれ以上高い利得は望めない戦略 (ナッシュ均衡)
  - 双方の利益・損失が一致しないとき，戦略を組み合わせる (混合戦略)